

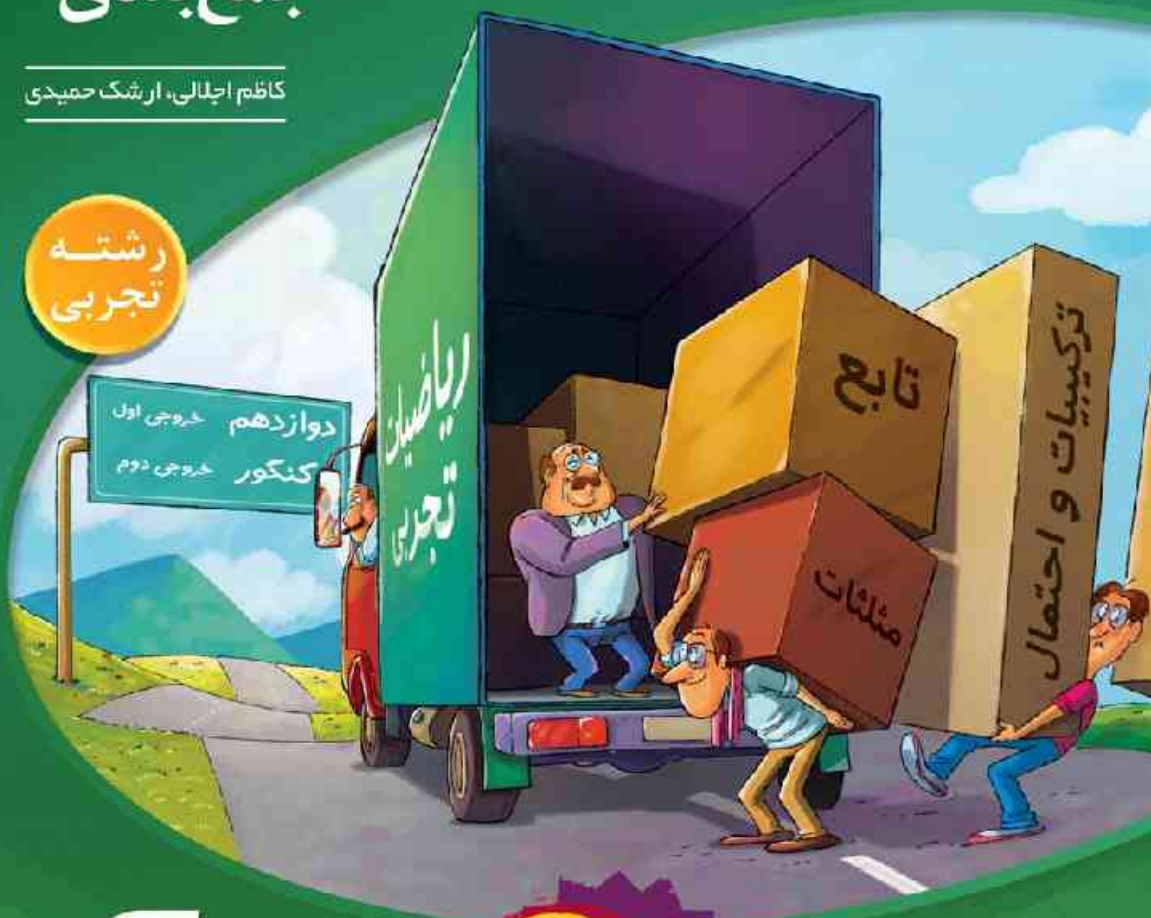
درستنامه + آزمون‌های مبحثی و جامع + پاسخ‌های تشریحی

ریاضیات پایه + جمع‌بندی

کاظم اجلالی، ارشد حمیدی

رشته
تجربی

دوازدهم خروجی اول
کنکور خروجی دوم



انتشارات
گنگو

ویژه
نظام جدید
آموزشی

پیش‌گفتار

معمولاً هر دانش‌آموزی در آستانه سال دوازدهم سودای قبولی در دانشگاه را دارد. با این حال، حتی وعده پذیرش بدون کنکور از اهمیت یادگیری اصولی نمی‌کاهد، چرا که آنچه همیشه مهم است دانستن و مهارت در استفاده از دانسته‌هاست. بگذریم که رشته‌های دانشگاهی هم مثل خیلی چیزهای دیگر «مُد روز» دارند و در هر مقطعی دانش‌آموزان برای قبولی در این رشته‌های مُد روز تلاش می‌کنند. به این ترتیب، دانش‌آموزان آینده‌نگر سعی می‌کنند پیش از ورود به سال دوازدهم پایه‌های معلومات خود را محکم کنند. بنابراین، مرور و جمع‌بندی دروس پایه‌های دهم و یازدهم اهمیت ویژه‌ای دارد.

نشر الگو، برای دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه، در هر پایه و برای هر درس ریاضی، کتاب سه‌بندی شامل درسنامه مفصل، تمرین‌های تشریحی و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و کتاب تست شامل درسنامه خلاصه و پرسش‌های چهارگزینه‌ای منتشر کرده است. همین‌طور، کتاب‌های موج آزمون که ویژه آمادگی برای آزمون‌های آزمایشی و کنکورهای سراسری است.

کتابی که در دست دارید، ویژه جمع‌بندی درس‌های ریاضی ۱ سال دهم و ریاضی ۲ سال یازدهم است. در این کتاب همه مباحث این درس‌ها را در ۱۵ فصل تنظیم کرده‌ایم.

در ابتدای هر فصل، همه مطالبی را که برای حل کردن پرسش‌های آن فصل باید بدانید آورده‌ایم. در درسنامه‌ها مثال‌های کلیدی و آموزنده آورده‌ایم. پس از آن، نوبت آزمون‌هاست. هر آزمون، ده پرسش دارد. در فصل ۱۵ هم شش آزمون جامع از همه مباحث آورده‌ایم. چون تلاش کرده‌ایم که تمام نکات مهم مباحث کتاب‌های درسی را در آزمون‌ها بگنجانیم، توصیه می‌کنیم که تمام آزمون‌ها را پاسخ دهید.

وظیفه خود می‌دانیم از همکاران عزیزمان در نشر الگو، خانم‌ها مهدیه جمشیدی و عاطفه ربیعی برای مطالعه و ویرایش کتاب، خانم نسیم نوریان برای صفحه‌آرایی و خانم سکینه مختار مستول واحد ویراستاری و حروفچینی انتشارات الگو تشکر و قدردانی کنیم. همچنین از آقای آریس آقانیانس برای کمک به ویرایش کتاب سپاسگزاریم.

مؤلفان

فهرست

● فصل اول: پایه و مجموعه

درسنامه	۲
آزمون ۱: پایه و مجموعه (۱)	۶
آزمون ۲: پایه و مجموعه (۲)	۷
آزمون ۳: پایه و مجموعه (۳)	۸

● فصل دوم: الگو و دنباله

درسنامه	۱۰
آزمون ۴: الگو و دنباله (۱)	۱۴
آزمون ۵: الگو و دنباله (۲)	۱۵
آزمون ۶: الگو و دنباله (۳)	۱۶
آزمون ۷: الگو و دنباله (۴)	۱۷
آزمون ۸: الگو و دنباله (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری)	۱۸

● فصل سوم: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه

درسنامه	۲۰
آزمون ۹: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه (۱)	۲۵
آزمون ۱۰: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه (۲)	۲۶
آزمون ۱۱: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه (۳)	۲۷
آزمون ۱۲: توان، ریشه، اتحاد و تجزیه (۴)	۲۸

● فصل چهارم: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم

درسنامه	۳۰
آزمون ۱۳: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۱)	۳۵
آزمون ۱۴: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۲)	۳۶
آزمون ۱۵: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۳)	۳۷
آزمون ۱۶: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۴)	۳۸
آزمون ۱۷: معادله درجه دوم و تابع درجه دوم (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری)	۳۹

● فصل پنجم: تعیین علامت، معادله و نامعادله

درسنامه	۴۲
آزمون ۱۸: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۱)	۴۶
آزمون ۱۹: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۲)	۴۷
آزمون ۲۰: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۳)	۴۸
آزمون ۲۱: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۴)	۴۹
آزمون ۲۲: تعیین علامت، معادله و نامعادله (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری)	۵۰

● فصل ششم: مثلثات

درسنامه	۵۲
آزمون ۲۳: مثلثات (۱)	۵۹
آزمون ۲۴: مثلثات (۲)	۶۰
آزمون ۲۵: مثلثات (۳)	۶۱
آزمون ۲۶: مثلثات (۴)	۶۲

● فصل هفتم: قدرمطلق و جزء صحیح

درسنامه	۶۴
آزمون ۲۷: قدرمطلق و جزء صحیح (۱)	۶۸
آزمون ۲۸: قدرمطلق و جزء صحیح (۲)	۶۹
آزمون ۲۹: قدرمطلق و جزء صحیح (۳)	۷۰
آزمون ۳۰: قدرمطلق و جزء صحیح (۴)	۷۱
آزمون ۳۱: قدرمطلق و جزء صحیح (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری)	۷۲

● فصل هشتم: تابع

درسنامه	۷۴
آزمون ۳۲: تابع (۱)	۸۲
آزمون ۳۳: تابع (۲)	۸۳

- آزمون ۵۳: ترکیبیات (۲) ۱۳۲
- آزمون ۵۴: ترکیبیات (۳) ۱۳۳
- آزمون ۵۵: ترکیبیات (۴) ۱۳۴

● فصل سیزدهم، احتمال

- درسنامه ۱۳۶
- آزمون ۵۶: احتمال (۱) ۱۴۱
- آزمون ۵۷: احتمال (۲) ۱۴۲
- آزمون ۵۸: احتمال (۳) ۱۴۳
- آزمون ۵۹: احتمال (۴) ۱۴۴
- آزمون ۶۰: احتمال (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری) ۱۴۵

● فصل چهاردهم، آمار

- درسنامه ۱۴۸
- آزمون ۶۱: آمار (۱) ۱۵۰
- آزمون ۶۲: آمار (۲) ۱۵۱
- آزمون ۶۳: آمار (۳) (برگزیده کنکورهای سراسری) ۱۵۲

● فصل پانزدهم: آزمون‌های جامع

- آزمون ۶۴: آزمون جامع (۱) ۱۵۴
- آزمون ۶۵: آزمون جامع (۲) ۱۵۵
- آزمون ۶۶: آزمون جامع (۳) ۱۵۶
- آزمون ۶۷: آزمون جامع (۴) ۱۵۷
- آزمون ۶۸: آزمون جامع (۵) ۱۵۸
- آزمون ۶۹: آزمون جامع (۶) ۱۵۹

● فصل شانزدهم، پاسخ‌های تشریحی ۱۶۲

● فصل هفدهم، پاسخنامه کلیدی ۲۳۶

- آزمون ۳۴: تابع (۳) ۸۴
- آزمون ۳۵: تابع (۴) ۸۵
- آزمون ۳۶: تابع (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری) ۸۶

● فصل نهم، توابع نمایی و لگاریتمی

- درسنامه ۸۸
- آزمون ۳۷: توابع نمایی و لگاریتمی (۱) ۹۴
- آزمون ۳۸: توابع نمایی و لگاریتمی (۲) ۹۵
- آزمون ۳۹: توابع نمایی و لگاریتمی (۳) ۹۶
- آزمون ۴۰: توابع نمایی و لگاریتمی (۴) ۹۷
- آزمون ۴۱: توابع نمایی و لگاریتمی (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری) ۹۸

● فصل دهم، حد و پیوستگی

- درسنامه ۱۰۰
- آزمون ۴۲: حد و پیوستگی (۱) ۱۰۶
- آزمون ۴۳: حد و پیوستگی (۲) ۱۰۷
- آزمون ۴۴: حد و پیوستگی (۳) ۱۰۸
- آزمون ۴۵: حد و پیوستگی (۴) ۱۰۹
- آزمون ۴۶: حد و پیوستگی (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری) ۱۱۰

● فصل یازدهم، استدلال و هندسه

- درسنامه ۱۱۲
- آزمون ۴۷: استدلال و هندسه (۱) ۱۲۱
- آزمون ۴۸: استدلال و هندسه (۲) ۱۲۳
- آزمون ۴۹: استدلال و هندسه (۳) ۱۲۴
- آزمون ۵۰: استدلال و هندسه (۴) ۱۲۵
- آزمون ۵۱: استدلال و هندسه (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری) ۱۲۶

● فصل دوازدهم، ترکیبیات

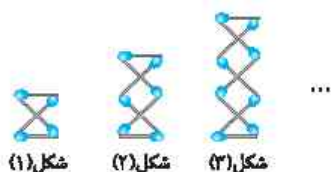
- درسنامه ۱۲۸
- آزمون ۵۲: ترکیبیات (۱) ۱۳۱

فصل دوم

الگو و دنباله

فصل ۲ الگو و دنباله

◆ الگوهایی که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عدد ثابتی باشد، **الگوهای خطی** نامیده می‌شوند. در این الگوها جمله عمومی به شکل $t_n = an + b$ است.



در الگوی مقابل، در شکل ۱۷ام چندتا چوب کبریت به کار رفته است؟

۳۶ (۲)	۳۴ (۱)
۴۰ (۴)	۳۸ (۳)

تست ۱

در هر گام ۳ چوب کبریت به شکل قبلی اضافه و یک چوب کبریت از آن کم می‌شود، در نتیجه در هر گام ۲ چوب کبریت به شکل افزوده می‌شود. بنابراین تعداد چوب کبریت‌ها در مرحله n ام برابر است با $4 + 2(n-1) = 2n + 2$. در نتیجه در شکل ۱۷ام ۳۶ چوب کبریت به کار رفته است.

راه حل

◆ جمله عمومی هر الگویی لزوماً خطی نیست. مثلاً الگوهایی که جمله عمومی آنها $t_n = n^2 + n$ یا $t_n = 2^n$ باشد، خطی نیستند.

◆ مجموع نخستین n عدد طبیعی برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$ ، یعنی

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ردیفی از عددها که دارای ترتیب باشند، **دنباله** نامیده می‌شود. عدد اول را جمله اول دنباله (a_1) ، عدد دوم را جمله دوم دنباله (a_2) ، ... و عدد n ام را جمله n ام دنباله (a_n) می‌نامند.

◆ در دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ را **جمله عمومی دنباله** می‌نامند.

تست ۲

دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{5n-39}{3n-10}$ چند جمله منفی دارد؟

۶ (۴)	۵ (۳)	۴ (۲)	۳ (۱)
-------	-------	-------	-------

به جدول تعیین علامت عبارت $y = \frac{5x-39}{3x-10}$ توجه کنید:

x	$-\infty$	۳	$\frac{10}{3}$	۴	۷	$\frac{39}{5}$	۸	$+\infty$
$\frac{5x-39}{3x-10}$	+	+	-	-	-	+	+	

از روی این جدول معلوم می‌شود که فقط جمله‌های a_4, a_5, a_6, a_7 منفی‌اند. پس دنباله مورد نظر چهار جمله منفی دارد.

راه حل

◆ **دنباله حسابی** دنباله‌ای است که در آن هر جمله، به جز جمله اول، با اضافه کردن عددی ثابت به جمله قبل از آن به دست می‌آید. این عدد ثابت را **قدرنسبت دنباله حسابی** می‌نامند.

◆ اگر دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی مانند n رابطه $a_{n+1} = a_n + d$ برقرار است.

◆ قدرنسبت دنباله حسابی را می‌توان از تفاضل هر دو جمله متوالی دنباله به دست آورد:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n+1} - a_n$$

◆ اگر جمله اول دنباله‌ای حسابی a_1 و قدرنسبت آن d باشد، جمله n ام یا همان جمله عمومی دنباله از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ به دست می‌آید.

تست

۳

اگر در دنباله‌ای حسابی با جمله عمومی a_n ، $a_{13} = 98$ و $a_{98} = 13$ مقدار a_{40} چقدر است؟
 ۶۶ (۱) ۶۹ (۲) ۷۱ (۳) ۷۴ (۴)

راه‌حل

فرض می‌کنیم قدرنسبت این دنباله حسابی برابر d باشد. در این صورت

$$\begin{cases} a_{13} = 98 \\ a_{98} = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 12d = 98 \\ a_1 + 97d = 13 \end{cases}$$

اگر این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم، به دست می‌آید $a_1 = 110$ و $d = -1$. بنابراین $a_{40} = a_1 + 39d = 71$.

الگوی هر دنباله حسابی، خطی بوده و جمله عمومی آن به شکل $a_n = An + B$ است که در آن A برابر قدرنسبت است:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d = dn + a_1 - d \Rightarrow a_n = dn + (a_1 - d)$$

تعداد جملات دنباله‌ای حسابی که جمله اول آن a_1 ، جمله آخر آن a_n و قدرنسبت آن d باشد، برابر است با $\frac{a_n - a_1}{d} + 1$.

اگر a_m و a_n دو جمله متمایز از دنباله‌ای حسابی باشند، قدرنسبت این دنباله برابر است با $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$.

تست

۴

اگر $x, y, z, t, 30$ دنباله‌ای حسابی باشد، مقدار $x + t$ چقدر است؟

۲۱ (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴)

راه‌حل

اگر دنباله مورد نظر را به صورت $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ بنویسیم، آن‌گاه $a_4 = 6$ و $a_6 = 30$. بنابراین قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$d = \frac{a_6 - a_4}{6 - 4} = \frac{30 - 6}{2} = 12$$

$$x = a_1 = a_4 - d = 6 - 12 = -6, \quad t = a_5 = a_6 - d = 30 - 12 = 18$$

$$x + t = 12$$

اگر a_m, a_n, a_r, a_s جمله‌های دنباله‌ای حسابی باشند و $m + n = r + s$ ، آن‌گاه $a_m + a_n = a_r + a_s$.

اگر a, b, c جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی باشند، c واسطه حسابی a و b است و $c = \frac{a+b}{2}$.

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $b > a$. اگر k عدد بین a و b بنویسیم به طوری که حاصل، دنباله‌ای حسابی باشد، گوئیم بین a و b به تعداد

k واسطه حسابی درج کرده‌ایم. در این صورت قدرنسبت از رابطه $d = \frac{b-a}{k+1}$ به دست می‌آید. زیرا b جمله $(k+2)$ ام دنباله a جمله اول آن است.

تست

۵

n واسطه حسابی بین 20 و 80 درج کرده‌ایم (جمله اول دنباله حاصل برابر 20 است). اگر نسبت اولین آن‌ها به آخرین آن‌ها برابر

$\frac{1}{3}$ باشد، مقدار n چقدر است؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

راه‌حل

فرض می‌کنیم دنباله حسابی حاصل $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ و قدرنسبت این دنباله برابر d باشد. در این صورت، $a_1 = 20 + d$ و $a_{n+1} = 80 - d$ در نتیجه

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{20+d}{80-d} = \frac{1}{3} \Rightarrow d = 5$$

اکنون توجه کنید که تعداد عضوهای دنباله $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ برابر $n+2$ است، در نتیجه

$$80 = 20 + (n+1)d = 20 + (n+1) \times 5 \Rightarrow n = 11$$

اگر چند عدد دنباله‌ای حسابی متناهی تشکیل دهند، برای سادگی در محاسبات می‌توانیم آن‌ها را به شکل‌های زیر در نظر بگیریم:

سه عدد: $a-d, a, a+d$ قدرنسبت $=d$

چهار عدد: $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ قدرنسبت $=2d$

پنج عدد: $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ قدرنسبت $=d$

مجموع سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی برابر -3 و حاصل ضرب آن‌ها برابر 8 است. مجموع مربع‌های این سه جمله چقدر است؟

۱۷ (۱) ۱۸ (۲) ۲۱ (۳) ۲۳ (۴)

می‌توانیم این سه جمله را $a-d, a, a+d$ بگیریم. در این صورت، طبق فرض،

$$(a-d) + a + (a+d) = -3 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

همین طور،

$$(a-d)(a)(a+d) = 8 \Rightarrow (-1-d)(-1)(-1+d) = 8 \Rightarrow d^2 - 1 = 8 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$$

به این ترتیب، اگر $d = -3$ ، جمله‌های مورد نظر $4, -1, -4$ هستند و اگر $d = 3$ ، جمله‌های مورد نظر $2, -1, 2$ هستند. در هر دو حالت، مجموع مربع‌های این سه جمله برابر 21 است.

دنباله هندسی دنباله‌ای است که جمله اول آن صفر نیست و در آن هر جمله به‌جز جمله اول از ضرب کردن عددی ثابت و غیر صفر در جمله قبل از آن به‌دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله هندسی می‌نامند.

اگر دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت r باشد، آن‌گاه به‌زای هر عدد طبیعی مانند n ، رابطه $a_{n+1} = a_n r$ برقرار است.

قدرنسبت دنباله هندسی را می‌توان از تقسیم هر دو جمله متوالی به‌دست آورد:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت r برابر است با $a_n = a_1 r^{n-1}$.

جمله نخست دنباله‌ای هندسی برابر 1 و مجموع جمله‌های سوم و پنجم این دنباله برابر 90 است. قدرمطلق قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

فرض می‌کنیم قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر r باشد. در این صورت، چون جمله نخست برابر 1 است، پس جمله سوم برابر r^2 و جمله پنجم برابر r^4 است. اکنون توجه کنید که طبق فرض،

$$r^2 + r^4 = 90 \Rightarrow r^4 + r^2 - 90 = 0 \Rightarrow (r^2 + 10)(r^2 - 9) = 0 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow |r| = 3$$

اگر a, b, c دنباله‌ای هندسی و $a, 2b, c$ دنباله‌ای حسابی باشد، قدرنسبت دنباله هندسی چقدر است؟

۱۵ (۱) ۳ (۲) ۱ (۳) $2 \pm \sqrt{3}$ (۴)

اگر قدرنسبت دنباله هندسی برابر r باشد، این دنباله می‌شود a, ar, ar^2 و دنباله حسابی می‌شود $a, 2ar, ar^2$. در نتیجه

$$2ar = \frac{a + ar^2}{2} \Rightarrow ar^2 + a = 4ar \Rightarrow a(r^2 - 4r + 1) = 0$$

چون a جمله نخست دنباله هندسی است، پس صفر نیست، در نتیجه

$$r^2 - 4r + 1 = 0 \Rightarrow r = 2 \pm \sqrt{3}$$

در دنباله هندسی a_1, a_2, a_3, \dots اگر $m+n=r+s$ ، آن‌گاه $a_m a_n = a_r a_s$.

اگر a, b و c سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی باشند، c واسطه هندسی a و b است و $c^2 = ab$.

جمله چهارم دنباله هندسی ... $3, 2x+2, 2x+2, x$ چقدر است؟

$$27 \quad (1) \quad -27 \quad (2) \quad \frac{27}{2} \quad (3) \quad -\frac{27}{2} \quad (4)$$

در دنباله هندسی، هر جمله (به جز جمله نخست) واسطه هندسی دو جمله مجاورش است. بنابراین، در دنباله هندسی مورد نظر،

$$(2x+2)^2 = x(3x+3) \Rightarrow 4(x+1)^2 = 3x(x+1) \Rightarrow (x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x = -4$$

اکنون توجه کنید که اگر $x = -1$ ، دنباله مورد نظر می‌شود ... $1, 0, 0, \dots$ که قدرنسبت آن صفر است که درست نیست. بنابراین $x = -4$ و

دنباله مورد نظر می‌شود ... $-4, -6, \dots$ که جمله نخست آن -4 و قدرنسبت آن برابر است با $\frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$. بنابراین جمله چهارم دنباله مورد نظر

$$\text{برابر است با } (-4)\left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{2}.$$

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $b > a$. اگر k عدد بین a و b را طوری بنویسیم که حاصل، دنباله‌ای هندسی باشد، گوییم بین a و b به تعداد k واسطه هندسی درج کرده‌ایم. در این صورت قدرنسبت از رابطه $r^{k+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. زیرا b جمله $(k+2)$ ام دنباله a جمله اول آن است.

بین عددهای 2 و 162 سه واسطه هندسی درج کرده‌ایم. حاصل ضرب این سه واسطه هندسی چقدر است؟

$$9^3 \quad (1) \quad 12^3 \quad (2) \quad 16^3 \quad (3) \quad 18^3 \quad (4)$$

فرض کنید دنباله حاصل $162, a, b, c, 2$ باشد (اگر دنباله به صورت $2, a, b, c, 162$ باشد، راه‌حل به همین صورت است). اگر قدرنسبت این دنباله برابر r باشد، آن‌گاه

$$162 = 2 \times r^4 \Rightarrow r = \pm 3$$

اگر $r = -3$ ، دنباله مورد نظر می‌شود $162, -54, 18, -6, 2$ ، اگر $r = 3$ ، دنباله مورد نظر می‌شود $162, 54, 18, 6, 2$ ، که در هر صورت، حاصل ضرب سه واسطه هندسی مورد نظر برابر است با $6 \times 18 \times 54 = 18^3$.

اگر چند عدد دنباله‌ای هندسی تشکیل دهند، برای سادگی در محاسبات می‌توانیم آن‌ها را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\text{قدرنسبت} = r \quad \frac{a}{r}, a, ar \quad \text{سه عدد}$$

$$\text{قدرنسبت} = r^2 \quad \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, ar, ar^2 \quad \text{چهار عدد هم‌علامت}$$

$$\text{قدرنسبت} = r \quad \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2 \quad \text{پنج عدد}$$

مجموع سه جمله نخست دنباله‌ای هندسی برابر $\frac{39}{10}$ و حاصل ضرب آن‌ها برابر 1 است. بیشترین مقدار ممکن جمله نخست این دنباله چقدر است؟

$$5 \quad (1) \quad \frac{5}{2} \quad (2) \quad \frac{5}{3} \quad (3) \quad \frac{5}{4} \quad (4)$$

می‌توانیم فرض کنیم دنباله مورد نظر به صورت $\dots, ar, a, \frac{a}{r}$ است. در این صورت

$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$$

همچنین،

$$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{39}{10} \Rightarrow \frac{1}{r} + 1 + r = \frac{39}{10} \Rightarrow \frac{1+r+r^2}{r} = \frac{39}{10}$$

$$10r^2 - 29r + 10 = 0 \Rightarrow (2r-5)(5r-2) = 0 \Rightarrow r = \frac{5}{2}, r = \frac{2}{5}$$

اگر $r = \frac{5}{2}$ ، جمله نخست می‌شود $\frac{2}{5}$ و اگر $r = \frac{2}{5}$ ، جمله نخست می‌شود $\frac{5}{2}$. بنابراین بیشترین مقدار ممکن جمله نخست برابر $\frac{5}{2}$ است.

اگر دنباله‌ای هم حسابی باشد و هم هندسی، آن‌گاه تمام جملات آن برابرند (دنباله‌ای ثابت است).

الگو و دنباله (۱)

آزمون ۴

راه حل: ۱۶۴ تا ۱۶۵

محاسبات

۱- تعداد نقاط در شکل سیزدهم از الگوی زیر چندتاست؟

شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴) ...

۲۴۷ (۱)
۲۵۲ (۲)
۲۶۰ (۳)
۲۶۵ (۴)

۲- دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{n^2 - 8n - 48}{n^2 + 1}$ چند جمله منفی دارد؟

۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۳- اندازه زاویه‌های یک چهارضلعی دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. اگر اندازه کوچک‌ترین زاویه این چهارضلعی برابر 21° باشد، اندازه بزرگ‌ترین زاویه آن چقدر است؟

۱۵۹° (۱) ۱۶۱° (۲) ۱۶۳° (۳) ۱۶۵° (۴)

۴- بین عددهای $-\frac{3}{2}$ و $-\frac{42}{2}$ دوازده واسطه حسابی درج کرده‌ایم. اگر جمله نخست دنباله حاصل $-\frac{1}{2}$ باشد، جمله هفتم آن چقدر است؟

$-18\frac{1}{2}$ (۱) $-19\frac{1}{2}$ (۲) $-20\frac{1}{2}$ (۳) $-21\frac{1}{2}$ (۴)

۵- در دنباله حسابی با جمله عمومی a_n ، $a_1 + a_8 = 32$ و $a_4 + a_8 = 74$ مقدار $a_4 - a_7$ چقدر است؟

۱۲ (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴)

۶- کوچک‌ترین جمله مثبت در دنباله حسابی $\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \dots$ چقدر است؟

$\frac{1}{8}$ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

۷- در دنباله هندسی $162, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$ جمله سوم از آخر کدام است؟

۵۴ (۱) ۲۷ (۲) ۱۸ (۳) ۶ (۴)

۸- اگر جمله‌های نخست، دوم و هشتم دنباله‌ای هندسی به ترتیب برابر a^{-2} ، a^k و a^{52} باشند، مقدار k چقدر است؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۹- حاصل ضرب هشت جمله نخست دنباله‌ای هندسی با جمله‌های مثبت برابر ۲۲ است. حاصل ضرب جمله‌های دوم و هفتم این دنباله چقدر است؟

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

۱۰- در دنباله‌ای هندسی با جمله‌های مثبت و جمله عمومی a_n ، $\frac{a_4}{a_6} = \frac{1}{4}$ و $a_7 + a_8 = 216$ مقدار a_1 چقدر است؟

۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۵ (۴)

الگو و دنباله (۲)

آزمون ۵

راه حل: ۱۶۵ تا ۱۶۶

محاسبات

- ۱- کوچکترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = 2n^2 - 17n + 3$ چقدر است؟
 (۱) -۳۳ (۲) -۳۴ (۳) -۴۳ (۴) -۴۴
- ۲- n واسطه حسابی بین عددهای ۱ و ۳۱ درج کرده‌ایم (جمله نخست دنباله حاصل ۱ است). اگر نسبت جمله هفتم دنباله حاصل به جمله یکی مانده به آخر آن برابر $\frac{13}{29}$ باشد، مقدار n چقدر است؟
 (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۱۴ (۴) ۲۹
- ۳- در دنباله‌ای حسابی با جمله عمومی a_n ، $\frac{a_4}{a_7} = \frac{2}{3}$ مقدار $\frac{a_6}{a_9}$ چقدر است؟
 (۱) $\frac{8}{11}$ (۲) $\frac{9}{11}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۴) $\frac{4}{7}$
- ۴- اگر a_1, a_2, \dots دنباله‌ای حسابی باشد، $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ و $a_3 + a_8 = -4$ مقدار a_7 چقدر است؟
 (۱) -۱۱ (۲) -۱۰ (۳) -۹ (۴) -۸
- ۵- مجموع شش عدد که دنباله‌ای حسابی تشکیل داده‌اند برابر ۳ و جمله نخست این دنباله سه برابر جمله سوم آن است. جمله پنجم این دنباله چقدر است؟
 (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) صفر
- ۶- مجموع سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۲۱ و مجموع مربع‌های آن‌ها برابر ۱۹۷ است. کوچکترین این عددها چقدر است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷
- ۷- حاصل ضرب شش عدد که دنباله‌ای هندسی تشکیل داده‌اند برابر ۵۱۲ است. اگر جمله چهارم این دنباله برابر ۴ باشد، جمله دوم آن چقدر است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۸
- ۸- اگر $3a - b, 8a - fb$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار $a - b$ چقدر است؟
 (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴) ۴۲
- ۹- مجموع جمله‌های اول و دوم دنباله‌ای هندسی برابر ۱۲ و مجموع جمله‌های سوم و چهارم آن برابر ۴۸ است. اگر علامت هر دو جمله کنار هم در این دنباله فرق داشته باشد، جمله نخست آن کدام است؟
 (۱) -۱۲ (۲) ۱۲ (۳) ۴ (۴) -۴
- ۱۰- اگر دنباله $9 - 2b, 2a + 3, 2a - 1, 3a - b$ هم دنباله‌ای حسابی باشد هم دنباله‌ای هندسی، مقدار $a - b$ چقدر است؟
 (۱) -۱ (۲) -۳ (۳) -۴ (۴) -۶

الگو و دنباله (۳)

آزمون ۶

راه حل: ۱۶۶ تا ۱۶۷

محاسبات

- ۱- بزرگترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = -2n^2 + 8n + 7$ چقدر است؟
- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۹
- ۲- اگر α و β زاویه‌های حاده مثلث قائم‌الزاویه باشند که طول ضلع‌های دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. مقدار $\sin \alpha \sin \beta$ چقدر است؟
- (۱) $\frac{3}{25}$ (۲) $\frac{8}{25}$ (۳) $\frac{9}{25}$ (۴) $\frac{12}{25}$
- ۳- n واسطه حسابی بین عددهای ۲ و ۳۸ درج کرده‌ایم. اگر جمله چهارم دنباله حاصل برابر ۱۴ باشد. مقدار n چقدر است؟
- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱
- ۴- در دنباله‌ای حسابی با جمله عمومی a_n ، $a_7 = k - 3$ و $a_8 = k + 3$. کدام جمله دنباله برابر $k + 27$ است؟
- (۱) a_{14} (۲) a_{15} (۳) a_{16} (۴) a_{17}
- ۵- مجموع سه جمله متوالی دنباله‌ای حسابی برابر ۱۲ و مجموع مکعب‌های آن‌ها برابر ۴۰۸ است. حاصل ضرب این سه عدد چقدر است؟
- (۱) ۲۸ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۳۸
- ۶- اگر $a, b, c, 1$ دنباله‌ای هندسی باشد. مقدار abc چقدر است؟
- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۴
- ۷- طول ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه جمله‌های متوالی دنباله‌ای هندسی هستند. کسینوس زاویه حاده بزرگ‌تر در این مثلث چقدر است؟
- (۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$
- ۸- حاصل ضرب سه جمله متوالی دنباله‌ای هندسی برابر ۲۱۶ و مجموع حاصل ضرب‌های دوه‌دو آن‌ها برابر ۱۵۶ است. بزرگ‌ترین این عددها چقدر است؟
- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱
- ۹- نسبت مجموع سه جمله نخست دنباله‌ای هندسی به مجموع شش جمله نخست آن برابر $\frac{125}{152}$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟
- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{5}$
- ۱۰- اگر a, b, c دنباله‌ای هندسی با جمله‌های نابرابر و $a, 2b, 3c$ دنباله‌ای حسابی باشد. قدرنسبت دنباله هندسی چقدر است؟
- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{6}$

الگو و دنباله (۴)

آزمون ۷

راه حل: ۱۶۷ تا ۱۶۸

محاسبات



- ۱- دنباله با جمله عمومی $a_n = \frac{n-2}{2n-1}$ چند جمله کوچکتر از $\frac{1}{4}$ دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۲- اگر k عددی طبیعی و زوج و بزرگترین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n = -n^2 + kn + k^2$ برابر ۲۰ باشد، مقدار k چقدر است؟
 (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۴
- ۳- جمله نخست دنباله‌ای حسابی برابر مربع قدرنسبت این دنباله است. اگر جمله هفتم این دنباله حسابی برابر ۹- باشد، جمله هشتم آن چقدر است؟
 (۱) -۶ (۲) -۸ (۳) -۱۲ (۴) -۱۴
- ۴- در دنباله‌ای حسابی با جمله عمومی a_n ، $a_{22} = 4a_0$ و $a_{12} = a_8 + 12$. جمله هفتم این دنباله چقدر است؟
 (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) ۲۶
- ۵- درباره دنباله‌ای حسابی با جمله عمومی a_n می‌دانیم $a_6 - a_1 + 2a_3 = 14$ و $a_5 - 2a_4 = -2$. مقدار a_0 چقدر است؟
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸
- ۶- جمله‌های کلام دنباله‌های هندسی $1, 2, 4, \dots$ و $256, 128, 64, \dots$ برابرند. مقدار k چقدر است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
- ۷- جمله سوم دنباله‌ای هندسی برابر ۴ است. حاصل ضرب پنج جمله نخست این دنباله چقدر است؟
 (۱) 4^3 (۲) 4^4 (۳) 4^5 (۴) 4^6
- ۸- در دنباله‌ای هندسی با جمله عمومی a_n ، $a_{12} = 5a_9$. مقدار $\frac{a_{41} + a_{42} + \dots + a_{50}}{a_{01} + a_{02} + \dots + a_{09}}$ چقدر است؟
 (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{25}$ (۳) $\frac{1}{50}$ (۴) $\frac{1}{100}$
- ۹- بین عددهای ۳ و ۲۴۲ سه واسطه هندسی درج کرده‌ایم. حاصل ضرب این سه واسطه هندسی چقدر است؟
 (۱) 3^6 (۲) 3^7 (۳) 3^8 (۴) 3^9
- ۱۰- مجموع جمله‌های دنباله حسابی a, b, c برابر ۱۵ است. اگر $a+8, b+6, c+4$ دنباله‌ای هندسی باشد، مقدار ac چقدر است؟
 (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴) ۲۴

الگو و دنباله (۵) (برگزیده کنکورهای سراسری)

آزمون ۸

راه حل: ۱۶۸ تا ۱۶۹

محاسبات

- ۱- اعداد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی اند. واسطه حسابی a و b کدام است؟
- (۱) $2/5$ (۲) 2 (۳) $1/5$ (۴) $\sqrt{2}$
- ۲- جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟
- (۱) $5/3$ (۲) $7/4$ (۳) $9/4$ (۴) $7/3$
- ۳- در یک دنباله اعداد، $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ ، $a_n = 2a_{n-1} + 1$. جمله هشتم این دنباله کدام است؟
- (۱) 127 (۲) 159 (۳) 247 (۴) 255
- ۴- در یک دنباله اعداد، $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ ، $a_n = 2a_{n-1} - 2$. مقدار $a_8 - a_7$ کدام است؟
- (۱) 32 (۲) 48 (۳) 56 (۴) 64
- ۵- اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟
- (۱) $4/3$ (۲) $3/2$ (۳) 2 (۴) 3
- ۶- اعداد $1 - 5p, 3p + 4, 2p + 3$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟
- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7
- ۷- در یک دنباله حسابی جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله متوالی از دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت بزرگتر از ۱ هستند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟
- (۱) $6/5$ (۲) $5/4$ (۳) $4/3$ (۴) $3/2$
- ۸- در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله، صفر است؟
- (۱) 9 (۲) 10 (۳) 11 (۴) 12
- ۹- تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله حسابی برابر ۵ و مجموع جمله دهم و دوازدهم برابر ۲۵ است. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟
- (۱) 35 (۲) 36 (۳) $37/5$ (۴) $38/5$
- ۱۰- در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی برابر ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۲۱۶ است. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟
- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

گزینه ۱-۳ ابتدا توجه کنید که

$$n(A) - n(B) = 6 \Rightarrow n(B) = n(A) - 6$$

بنابراین

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$12 = n(A) + n(A) - 6 - n(A \cap B)$$

$$9 = n(A) - \frac{1}{2}n(A \cap B) \Rightarrow n(A) = 9 + \frac{1}{2}n(A \cap B)$$

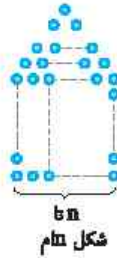
در نتیجه، برای اینکه $n(A)$ کمترین مقدار ممکن باشد، باید $n(A \cap B) = 0$ که در این حالت، $n(A)$ برابر ۹ می‌شود.

فصل ۲ آزمون ۴

گزینه ۱

هر شکل یک مربع دارد که تعداد نقاط آن با مربع شماره شکل برابر است. همچنین یک مثلث دارد که تعداد نقاط آن برابر $(n-1) + (n-2) + \dots + 1$ است، که n شماره شکل است. پس شکل سیزدهم به تعداد 13^2 نقطه در قسمت مربع دارد و در مثلث بالای آن به تعداد $1+2+\dots+12$ نقطه وجود دارد.

$$13^2 + 1 + 2 + \dots + 12 = 169 + \frac{12 \times 13}{2} = 247$$



شکل ۱۳

گزینه ۲-۳ توجه کنید که $n^2 + 1$ همواره مثبت است، پس

$$a_n = \frac{n^2 - 8n - 48}{n^2 + 1} < 0 \Rightarrow n^2 - 8n - 48 < 0$$

$$(n-12)(n+4) < 0 \Rightarrow n < 12$$

و چون n عددی طبیعی است، پس $n \leq 11$. یعنی n یکی از بازه عدد ۰.۱، ۰.۲، ۰.۳ و ۱۱ است.

گزینه ۱

اگر قدرنسبت این دنباله برابر d باشد، اندازه زاویه‌های این چهارضلعی می‌شوند $21^\circ + d$ ، $21^\circ + 2d$ ، $21^\circ + 3d$ و $21^\circ + 4d$. چون مجموع اندازه‌های زاویه‌های چهارضلعی برابر 360° است، پس $21^\circ + 21^\circ + d + 21^\circ + 2d + 21^\circ + 3d + 21^\circ + 4d = 360^\circ$
 $84^\circ + 6d = 360^\circ \Rightarrow d = 46^\circ$
 پس اندازه بزرگ‌ترین زاویه برابر است با $21^\circ + 4 \times 46^\circ = 159^\circ$.

گزینه ۲-۴

جمله‌های نخست و آخر دنباله حسابی حاصل به ترتیب برابرند با $-\frac{3}{2}$ و $-\frac{42}{2}$ و تعداد جمله‌های این دنباله برابر ۱۴ است، بنابراین، قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$d = \frac{-\frac{42}{2} - (-\frac{3}{2})}{14-1} = -3$$

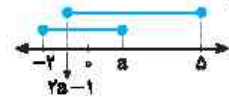
در نتیجه، جمله هفتم دنباله حاصل برابر است با $-\frac{3}{2} + 6d = -\frac{3}{2} + 6(-3) = -\frac{3}{2} - 18 = -\frac{39}{2}$

گزینه ۲ از روی شکل زیر معلوم می‌شود که برای اینکه بازه‌های

$[2a-1, 5]$ و $[-2, a]$ اشتراک داشته باشند باید $2a-1 \leq a$ ، یعنی باید $a \leq 1$.

همچنین، باز هم از روی شکل، معلوم می‌شود که برای اینکه اشتراک این دو بازه شامل عددی منفی باشد، باید $2a-1 < 0$ ، یعنی $a < \frac{1}{2}$ ، بنابراین حدود مقادیر

مورد نظر a به صورت $a < \frac{1}{2}$ است.

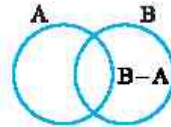


گزینه ۳ توجه کنید که $(X')' = X$ ، بنابراین

$$A \cup B = ((A \cup B)')' = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$$

در نتیجه

$$A = (A \cup B) - (B - A) = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} - \{2, 5\} = \{1, 3, 4, 8\}$$



گزینه ۳ ابتدا توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$29 = 2n(B) + n(B) - 7 \Rightarrow n(B) = 12$$

اکنون توجه کنید که

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 12 - 7 = 5$$

گزینه ۱-۷ توجه کنید که اگر X زیرمجموعه U باشد، آن‌گاه

$$n(U) = n(X) + n(X')$$

$$\begin{cases} n(A) + n(B) = 9 \\ n(A') + n(B) = 7 \end{cases} \Rightarrow n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = 16$$

$$n(U) + n(U) = 16 \Rightarrow n(U) = 8$$

$$n(C') = n(U) - n(C) = 8 - 6 = 2$$

گزینه ۲ توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) = 16 \quad (1)$$

همچنین،

$$n(A') + n(B') = 8 + 1 = 9 \quad (2)$$

اکنون توجه کنید که اگر X زیرمجموعه U باشد، آن‌گاه

$$n(U) = n(X) + n(X')$$

بنابراین، اگر تساوی‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید

$$n(A) + n(A') + n(B) + n(B') = 34$$

$$n(U) + n(U) = 34 \Rightarrow n(U) = 17$$

به این ترتیب، $n(A) = n(U) - n(A') = 17 - 8 = 9$.

گزینه ۴-۹

از فرض‌های مسئله نتیجه می‌شود

$$n(A) - n(B) = 7 \Rightarrow n(A) = n(B) + 7$$

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 15 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A \cap B) + 15$$

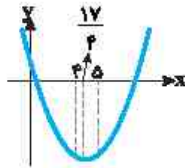
اکنون توجه کنید که

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) + 15 = n(B) + 7 + n(B) - n(A \cap B)$$

$$2n(A \cap B) + 8 = 2n(B) \Rightarrow n(B) - n(A \cap B) = 4 \Rightarrow n(B - A) = 4$$

از روی نمودار این سهمی در شکل زیر معلوم می‌شود که کوچک‌ترین جمله دنباله مورد نظر به ازای $n=4$ به دست می‌آید و برابر است با $a_4 = -33$.



۲- گزینه ۳ فرض می‌کنیم قدرنسبت دنباله حاصل برابر d باشد. در این صورت، جمله هفتم برابر $1+6d$ و جمله یکی مانده به آخر برابر $31-d$ است. در نتیجه

$$\frac{1+6d}{31-d} = \frac{17}{29} \Rightarrow 29+6 \times 29d = 31 \times 17 - 17d \Rightarrow d = 2$$

اکنون توجه کنید که دنباله حاصل $n+2$ جمله دارد که جمله نخست و آخر آن به ترتیب ۱ و ۳۱ هستند و قدرنسبت آن برابر ۲ است. در نتیجه

$$2 = \frac{31-1}{n+2-1} \Rightarrow n = 14$$

۳- گزینه ۱ فرض می‌کنیم قدرنسبت این دنباله حسابی برابر d باشد. در این صورت

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{a_1+3d}{a_1+d} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3a_1+9d = 2a_1+2d \Rightarrow a_1 = -7d$$

اکنون توجه کنید که

$$\frac{a_6}{a_9} = \frac{a_1+5d}{a_1+8d} = \frac{3d+5d}{-7d+8d} = \frac{8}{11}$$

۴- گزینه ۱ فرض می‌کنیم قدرنسبت این دنباله حسابی برابر d باشد. در این صورت

$$\begin{cases} a_1+a_7+a_8=12 \\ a_7+a_8=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_1+d+a_1+7d=12 \\ a_1+7d+a_1+8d=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1+8d=12 \\ 2a_1+15d=-4 \end{cases} \Rightarrow a_1=7, d=-2$$

بنابراین $a_9 = a_1+8d = -11$.

۵- گزینه ۳ فرض می‌کنیم جمله نخست این دنباله حسابی برابر a و قدرنسبت آن برابر d باشد. در این صورت

$$a+a+d+a+2d+a+3d+a+4d+a+5d=3$$

$$6a+15d=3 \Rightarrow 2a+5d=1 \quad (1)$$

از طرف دیگر، چون جمله نخست سه برابر جمله سوم است، پس

$$a=3(a+2d) \Rightarrow a+3d=0 \quad (2)$$

از تساوی‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $a=3$ و $d=-1$. بنابراین جمله پنجم برابر است با $a+4d=-1$.

۶- گزینه ۱ می‌توانیم این جمله‌ها را $a-d$ ، a و $a+d$ بگیریم. در این صورت

$$a-d+a+a+d=21 \Rightarrow 3a=21 \Rightarrow a=7$$

$$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=197 \Rightarrow 3a^2+2d^2=197$$

$$3 \times 49+2d^2=197 \Rightarrow d^2=25 \Rightarrow d=\pm 5$$

اگر $d=-5$ ، عددها می‌شوند ۷، ۲ و ۱۲. اگر $d=5$ ، عددها می‌شوند ۷، ۲ و ۱۲. بنابراین در هر صورت کوچک‌ترین این عددها برابر ۲ است.

۵- گزینه ۴ اگر قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر d باشد، آن‌گاه

$$\begin{cases} a_1+a_8=32 \\ a_7+a_8=74 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+a_1+7d=32 \\ a_1+7d+a_1+7d=74 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1+7d=32 \\ 2a_1+14d=74 \end{cases} \Rightarrow d=7$$

بنابراین

$$a_1-a_6=(a_1+7d)-(a_1+6d)=7d=49$$

۶- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر است با

$$d = 22 \frac{3}{4} - 25 = -\frac{9}{4}$$

$$a_{12} = a_1 + (12-1)d = 25 - (12-1) \frac{9}{4} > 0 \quad k \leq 12 \text{ طبیعی است}$$

بنابراین کوچک‌ترین جمله مثبت دنباله مورد نظر برابر است با

$$a_{11} = 25 - 11 \times \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

۷- گزینه ۳ قدرنسبت دنباله هندسی مورد نظر برابر است با

$$\frac{2}{\frac{9}{27}} = 3$$

بنابراین جمله‌های دنباله از آخر برابرتند با $1, \frac{162}{3}, \frac{162}{9}, \dots$ ، یعنی جمله

$$\text{سوم از آخر برابر است با } \frac{162}{9} = 18.$$

۸- گزینه ۲ قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر است با $\frac{a^k}{a^{-k}} = a^{k+k} = a^{2k}$

جمله هشتم دنباله هندسی برابر است با جمله نخست ضرب در قدرنسبت به توان ۷، یعنی

$$a^{52} = a^{-k} \times (a^{k+k})^7 \Rightarrow a^{52} = a^{7k+2k} \Rightarrow 52 = 9k \Rightarrow k = \frac{52}{9}$$

۹- گزینه ۴ فرض می‌کنیم جمله نخست این دنباله هندسی برابر a و قدرنسبت آن برابر r باشد. در این صورت، طبق فرض،

$$a(ar)(ar^2)(ar^3)(ar^4)(ar^5)(ar^6)(ar^7) = 32$$

$$a^8 r^{28} = 32 \Rightarrow (a^2 r^7)^4 = 32 \Rightarrow a^2 r^7 = \sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$$

بنابراین، حاصل ضرب جمله‌های دوم و هفتم برابر است با

$$(ar)(ar^6) = a^2 r^7 = 2\sqrt[4]{2}$$

۱۰- گزینه ۲ فرض می‌کنیم قدرنسبت این دنباله برابر r باشد. در این

صورت، چون جمله‌های دنباله مثبت‌اند، r هم مثبت است. اکنون توجه کنید که

$$\frac{a_4}{a_6} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a_1 r^3}{a_1 r^5} = \frac{1}{4} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

از طرف دیگر،

$$a_7 + a_8 = 216 \Rightarrow a_1 r^6 + a_1 r^7 = 216$$

$$2a_1 + 16a_1 = 216 \Rightarrow a_1 = 12$$

فصل ۲ آزمون ۵

۱- گزینه ۱ طول پایین‌ترین نقطه سهمی $y = 2x^2 - 17x + 23$ برابر

$$\text{است با } -\frac{b}{2a} = -\frac{-17}{2 \times 2} = \frac{17}{4}$$

چون $a+d$ از $a-d$ و a بزرگ‌تر است، پس طول وتر مثلث است، در نتیجه، بنا بر قضیه فیثاغورس.

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + a^2 \Rightarrow a^2 + 2ad + d^2 = a^2 - 2ad + d^2 + a^2$$

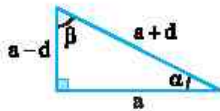
$$a^2 = 4ad \Rightarrow a = 4d$$

به این ترتیب، اگر α زاویه روبه‌رو به ضلع با طول $a-d$ و β زاویه روبه‌رو به ضلع با طول a باشد، آن‌گاه

$$\sin \alpha = \frac{a-d}{a+d} = \frac{4d-d}{4d+d} = \frac{3d}{5d} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \beta = \frac{a}{a+d} = \frac{4d}{4d+d} = \frac{4d}{5d} = \frac{4}{5}$$

بنابراین $\sin \alpha \sin \beta = \frac{12}{25}$.



گزینه ۳-۱ فرض کنید دنباله حاصل $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ باشد. چون تعداد عضوهای این دنباله برابر $n+2$ است، پس قدرنسبت آن

برابر است با $d = \frac{38-2}{n+2-1} = \frac{36}{n+1}$ در نتیجه،

$$a_n = 14 \Rightarrow 2 + 3\left(\frac{36}{n+1}\right) = 14 \Rightarrow n = 8$$

گزینه ۴-۳ فرض می‌کنیم قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر d باشد. در این صورت

$$\begin{cases} a_5 = k-3 \\ a_8 = k+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = k-3 & (1) \\ a_1 + 7d = k+3 & (2) \end{cases}$$

اگر تساوی (۱) را از تساوی (۲) کم کنیم، به دست می‌آید $3d = 6$ پس $d = 2$. اکنون از تساوی (۱) به دست می‌آید

$$a_1 + 5 \times 2 = k-3 \Rightarrow a_1 = k-13$$

اکنون فرض کنید $a_m = k+27$ در این صورت

$$a_1 + (m-1)d = k+27 \Rightarrow k-13 + (m-1) \times 2 = k+27$$

$$2(m-1) = 40 \Rightarrow m = 21$$

گزینه ۵-۱ فرض می‌کنیم این سه جمله $a-d, a, a+d$ باشند. در این صورت

$$(a-d) + a + (a+d) = 12 \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow a = 4$$

در نتیجه

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 4+8 \Rightarrow 3a^2 + 6ad^2 = 4+8$$

$$a^2 + 2ad^2 = 13 \Rightarrow 6+8d^2 = 13 \Rightarrow d = \pm 1$$

اگر $d = -3$ ، دنباله مورد نظر می‌شود $7, 4, 1$ و اگر $d = 3$ ، دنباله مورد نظر می‌شود $1, 4, 7$ ، که در هر صورت حاصل ضرب جمله‌های دنباله برابر ۲۸ است.

گزینه ۶-۲ اگر قدرنسبت دنباله مورد نظر برابر r باشد، آن‌گاه

$$a = 1 \times r = r, b = r^2, c = r^3, \text{ و } 2 = r^4, \text{ بنابراین } r = \sqrt[4]{2}, \text{ به این ترتیب}$$

$$abc = r \times r^2 \times r^3 = r^6 = (\sqrt[4]{2})^6 = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۷-۲ اگر جمله نخست را برابر a و قدرنسبت را برابر r بگیریم، از فرض‌های مسئله نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} a(ar)(ar^2)(ar^3)(ar^4) = 512 & (1) \\ ar^3 = 4 & (2) \end{cases}$$

از تساوی (۱) نتیجه می‌شود

$$a^5 r^{10} = 512 \Rightarrow a(ar^2)^5 = 512 \quad (3)$$

اکنون از تساوی‌های (۲) و (۳) به دست می‌آید $a(4)^5 = 512$ ، در نتیجه $a = \frac{1}{4}$ ، بنابراین، از تساوی (۲) به دست می‌آید $r^3 = 8$ ، یعنی $r = 2$ ، به این ترتیب، جمله دوم برابر است با $ar = 1$.

گزینه ۸-۲ ابتدا توجه کنید که قدرنسبت این دنباله برابر است با

$$\frac{8a-4b}{2a-b} = 4, \text{ بنابراین } 8a-4b = 12(2a-b), \text{ همین‌طور}$$

$$2a-b = 4a \Rightarrow 24-b = 48 \Rightarrow b = -24$$

بنابراین $a-b = 36$.

گزینه ۹-۱ اگر جمله اول را برابر a و قدرنسبت را برابر r بگیریم، از فرض‌های مسئله نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} a+ar = 12 \\ ar^2 + ar^3 = 48 \end{cases}$$

بنابراین

$$ar^2 + ar^3 = 48 \Rightarrow r^2(a+ar) = 48 \Rightarrow r^2(12) = 48$$

$$r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

اگر $r = 2$ ، علامت همه جمله‌های دنباله یکسان است، پس $r = -2$ ، در نتیجه

$$a+a(-2) = 12 \Rightarrow a = -12$$

گزینه ۱۰-۴ اگر دنباله‌های هم دنباله‌ای حسابی باشد هم دنباله‌ای هندسی، همه جمله‌های آن با هم برابرند، بنابراین

$$3a-1 = 2a+3 \Rightarrow a = 4$$

همچنین،

$$2b-9 = 2a+3 \Rightarrow 2b-9 = 11 \Rightarrow b = 10$$

پس $a-b = -6$.

فصل ۲ **آزمون ۶**

گزینه ۱-۲ طول بالاترین نقطه سهمی $y = -2x^2 + 8x + 7$ برابر

است با $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-4} = 2$ ، چون این مقدار عددی طبیعی است، پس

بزرگ‌ترین جمله دنباله مورد نظر برابر است با $a_4 = 15$.

گزینه ۲-۴ فرض می‌کنیم دنباله طول ضلع‌های مثلث

$a-d, a, a+d$ باشد که در آن a و d عددهایی مثبت‌اند، در این صورت،